การเปรียบเทียบค่าความไม่แน่นอนของการวัด
โดยวิธีจำลองมอนติคาร์โลกับวิธีมาตรฐานตาม GUM
(Comparisons of the Uncertainty of Measurement
between Monte Carlo Simulation and GUM method)

โดย *พล.อ.ต. ดร. เพียร โตท่าโรง ที่ปรึกษาสมาคมมาตรวิทยาแห่งประเทศไทย*

บทนำ

บทความฉบับนี้เป็นบทความที่มีเนื้อหาต่อจากบทความฉบับแรกเรื่อง "การประมาณค่าความไม่แน่นอนของการวัดด้วยวิธีการจำลองมอนติคาร์โล" (Uncertainty of Measurement by Monte Carlo Simulation) โดยบทความฉบับนี้จะเปรียบเทียบผลลัพธ์ของการหาค่าความไม่แน่นอนของการวัดโดยวิธีการจำลองมอนติคาร์โลกับผลลัพธ์จากการคำนวณโดยวิธีมาตรฐาน (Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement, GUM) ในสองกรณีตัวอย่างได้แก่ การวัดกระแสไฟฟ้า และ การสอบเทียบเครื่องชั่งอิเล็คทรอนิคส์

ตัวอย่างการเปรียบเทียบผลลัพธ์ความไม่แน่นอนของการวัดด้วยวิธีมอนติคาร์โลกับการคำนวณด้วยวิธีมาตรฐาน(GUM)

ตัวอย่างที่ 1 การวัดไฟฟ้ากระแสตรง 10 A โดยใช้ดิจิตอลโวล์ทมิเตอร์วัดค่าแรงดันไฟฟ้าที่ตกคร่อมความต้านทานมาตรฐาน (Shunt Resistor) ที่นำมาต่ออนุกรมในวงจร ผลลัพธ์ของการวัดค่าแรงดันไฟฟ้าจำนวน 10 ครั้ง ที่อุณหภูมิห้อง 23±5 °C มีค่าดังนี้

V(mV)	100.68	100.83	100.79	100.64	100.63	100.94	100.60	100.68	100.76	100.65

โดยที่ Shunt Resistor มีคุณลักษณะเฉพาะดังนี้

- จากใบรับรองการสอบเทียบ R = 0.010088 Ω ที่ค่ากระแส 10 A (23 °C) และค่าความไม่แน่นอนของการวัด ± 0.08% ที่ระดับความเชื่อมั่น 95%
- Temperature Coefficient ระหว่างช่วงอุณหภูมิ 15 ถึง 30 °C มีค่า 60 ppm/°C
- ในการสอบเทียบไม่คิดค่าความไม่แน่นอนเนื่องจาก Resistance Drift และดิจิตอลโวล์ทมิเตอร์มีคุณลักษณะเฉพาะดังนี้

- ในช่วงอุณหภูมิ 15-40 °C ที่ Range = 200 mV Full Scale = 199.99 mV ความละเอียดในการอ่านผลการวัด (Voltmeter Resolution) = ±(0.03% of reading + 2 counts)

การคำนวณความไม่แน่นอนของการวัดด้วยวิธีมาตรฐาน ดังนี้

1. สมาการระบบการวัด

$$I \;=\; f(V, R) \;=\; \frac{V}{R}$$

โดยที่ I = ผลลัพธ์ของการวัดค่ากระแสไฟฟ้าในวงจร

R = ค่าความต้านทานของ Shunt Resistor

V = ค่าแรงดันไฟฟ้าที่ตกคร่อม Shunt Resistor ที่วัดด้วยโวล์ทมิเตอร์

2. การหาค่าความไม่แน่นอนของการวัด Type A, u_a

$$u_a \;=\; \frac{s(V)}{\sqrt{n}}$$

โดยที่ $s(V)$ = ค่าเบี่ยงเบนมาตรฐานของค่าแรงดันไฟฟ้า (V)

n = จำนวนครั้งของการวัด

จากข้อมูลการวัด 10 ครั้งคำนวณหาค่าเฉลี่ยได้เท่ากับ 100.72 mV และคำนวณหาค่าเบี่ยงเบนมาตรฐานได้เท่ากับ $10.75\text{x}10^{-2}$ mV แทนค่าในสมาการข้างต้น ได้ดังนี้

$$u_a = \frac{s(V)}{\sqrt{n}} = \frac{10.75x10^{-2}}{\sqrt{10}} = \pm\ 3.40\text{x}10^{-2}\ \text{mV}$$

โดยที่ Degree of Freedom มีค่าเท่ากับ 9

3. คำนวณหาค่าความไม่แน่นอนของการวัด Type B

3.1 ความไม่แน่นอนของการวัดเนื่องจากความละเอียดของโวล์ทมิเตอร์ (Voltmeter Resolution) มีค่า ±0.03% of reading + 2 counts = ± (0.03/100)x100.72+2(0.01) = ± $5.02\text{x}10^{-2}$ mV ดังนั้นค่าความไม่แน่นอนของการวัดมาตรฐาน (Standard Uncertainty) เนื่องจากความละเอียดของโวล์ทมิเตอร์ (u_2) หาได้ดังนี้ โดยลักษณะการกระจายตัวเป็นชนิดสี่เหลี่ยมผืนผ้า (Rectangular Distribution)

$$u_2 = \frac{5.02\times10^{-2}}{\sqrt{3}} = \pm\ 2.90\text{x}10^{-2}\ \text{mV}$$

โดยที่ Degree of Freedom มีค่าเท่ากับค่าอนันต์

3.2 ความไม่แน่นอนของค่าความต้านทางของ Shunt Resistor (u_3)

u_3(95%) = 0.08% x 0.010088 = $\pm$ 8.07 x 10^{-6} Ω ที่ระดับความเชื่อมั่น 95%

โดยที่ลักษณะการกระจายตัวเป็นชนิด Normal Distribution ดังนั้นความไม่แน่นอนของการวัดมาตรฐานมีค่าเท่ากับ

$$u_3 = \frac{8.07 \text{ x } 10^{-6}}{2} = \pm\ 4.035 \text{ x } 10^{-6}\ \Omega$$

โดยที่ Degree of Freedom มีค่าเท่ากับค่าอนันต์

3.3 ความไม่แน่นอนของค่าความต้านของ Shunt Resistor เนื่องจากผลของอุณหภูมิ (u_4) ค่าสัมประสิทธิ์การเปลี่ยนแปลงค่าความต้านทานเนื่องจากอุณหภูมิ (Temperature Coefficient) มีค่าเท่ากับ 60 ppm/°C โดยที่ลักษณะการกระจายตัวเป็นชนิดสี่เหลี่ยมผืนผ้า ดังนั้นค่าความไม่แน่นอนมาตรฐานเนื่องจากการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิมีค่าเท่ากับ

$$u_4 = \frac{60\times10^{-6}\times \Delta t \times R}{\sqrt{3}} = \frac{60\times10^{-6}\times5\times0.01088}{\sqrt{3}} = \frac{3.03\times\ 10^{-6}}{\sqrt{3}}\ \Omega$$

$$= \pm\ 1.75 \text{ x } 10^{-6}\ \Omega$$

โดยที่ Degree of Freedom มีค่าเท่ากับค่าอนันต์

4. คำนวณหาค่าความไม่แน่นอนรวม (Combined Standard Uncertainty), u_C

$$u_C = \sqrt{{c_1}^2\, {u_\mathrm{a}}^2 + {c_1}^2\, {u_2}^2 + {c_2}^2\, {u_3}^2 + {c_2}^2\, {u_4}^2}$$

จากสมการระบบการวัดข้างต้นจะหาค่า Sensitivity Coefficients, c_1, c_2 ได้โดยมีค่าดังนี้

$$c_1 = \frac{\partial I}{\partial V} = \frac{1}{R} = \frac{1}{0.010088} = 99.128 \text{ S}$$

$$c_2 = \frac{\partial I}{\partial R} = -\frac{V}{R^2} = -989.70 \text{ V}/\Omega^2$$

แทนค่าในสมการข้างต้นสามารถหาค่าความไม่แน่นอนรวมได้ดังนี้

$$u_C = \sqrt{(3.37\times10^{-3})^2 + (2.87\times10^{-3})^2 + (4.08\times10^{-3})^2 + (1.73\times10^{-3})^2}$$

$$= \pm\ 6.26 \text{ x } 10^{-3} \text{ A}$$

5. คำนวณวณหาค่า Effective Degree of Freedom, v_{eff}

สามารถหาได้โดยใช้สมการ *Welch-Satterthwaite* ดังนั้น

$$v_{eff} = \frac{(6.26\times10^{-3})^4}{\frac{(3.37\times10^{-3})^4}{9}+\frac{(2.87\times10^{-3})^4}{\infty}+\frac{(4.08\times10^{-3})^4}{\infty}+\frac{(1.73\times10^{-3})^4}{\infty}} \approx 107$$

6. คำนวณหาค่าความไม่แน่นอนขยาย (Expanded Uncertainty) , U

ใช้ค่า Effective Degree of Freedom, v_{eff} = 107, หาค่า Coverage Factor, k จากตาราง Student's t ได้ค่า $k = 2$ ที่ระดับความเชื่อมั่น 95% ดังนั้น

$$U = k\ u_C = 2 \times 6.26 \times 10^{-3} = \pm 0.0125 \text{ A}$$

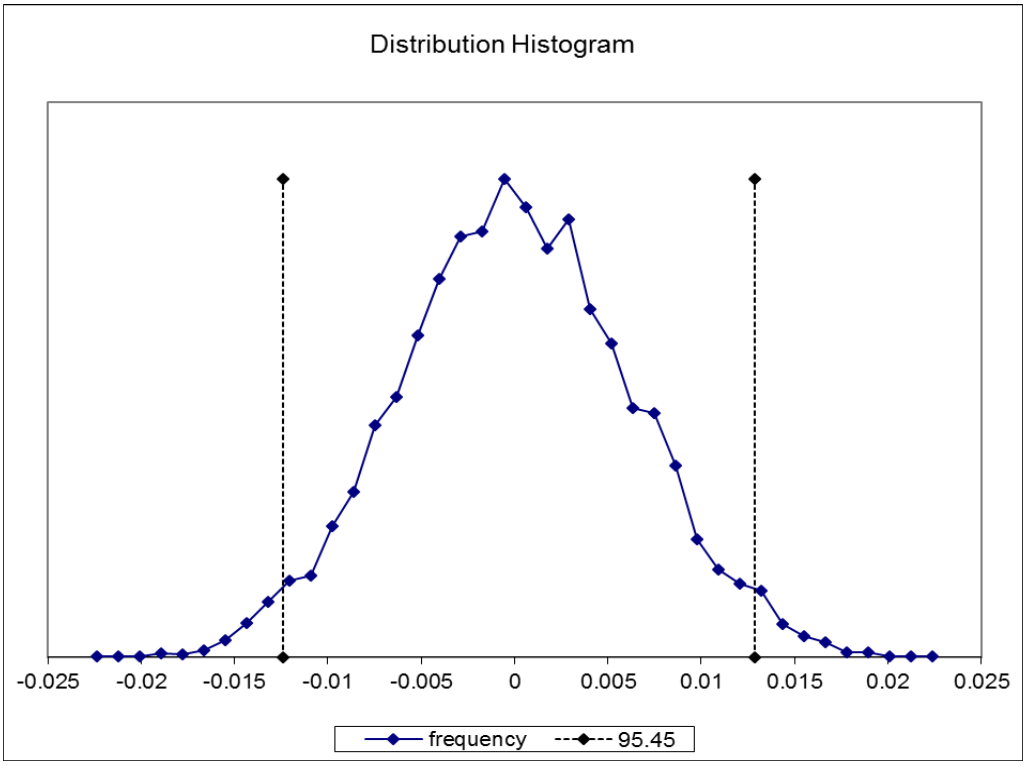
7. การรายงานผลการวัดค่ากระแสไฟฟ้า

จากข้อมูลการอ่านแรงดันไฟฟ้าตกคร่อม Shunt Resistor 10 ครั้ง หาค่าเฉลี่ยได้เท่ากับ 100.72×10^{-3} V ดังนั้นผลลัพธ์ของการวัดค่ากระแสไฟฟ้าจะเท่ากับ

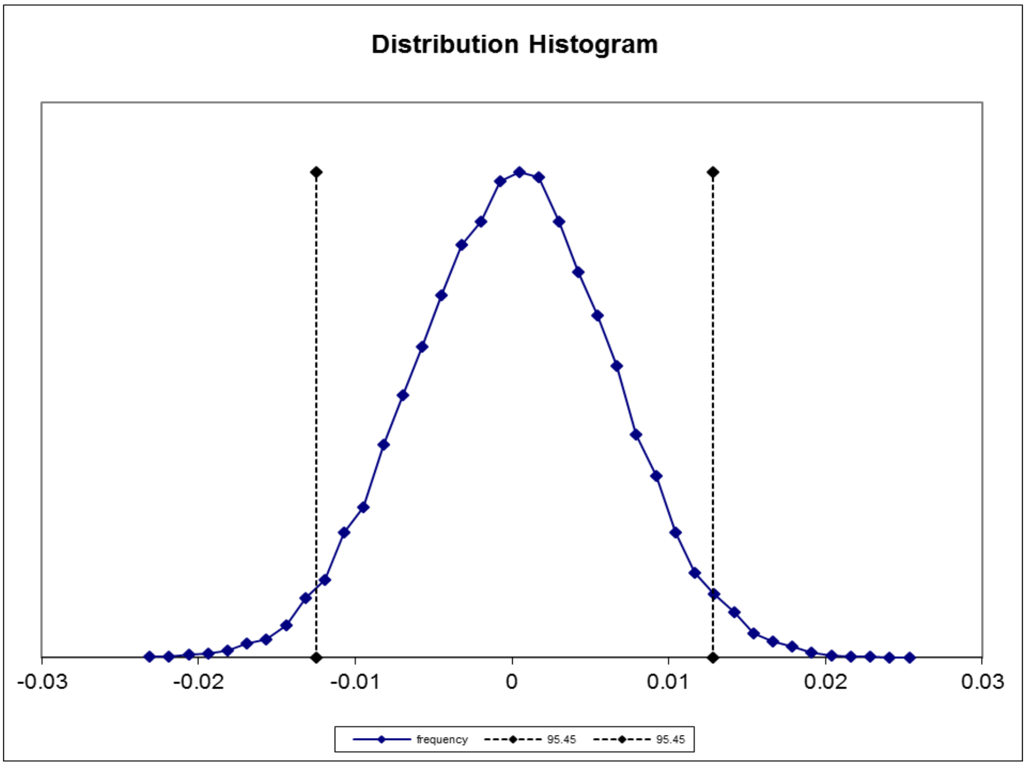
$$I = \frac{V}{R} = \frac{100.72\times10^{-3}}{0.010088} = 9.984 \text{ A}$$

$$I = 9.984 \pm 0.013 \text{ A}$$ ที่ระดับความเชื่อมั่น 95%

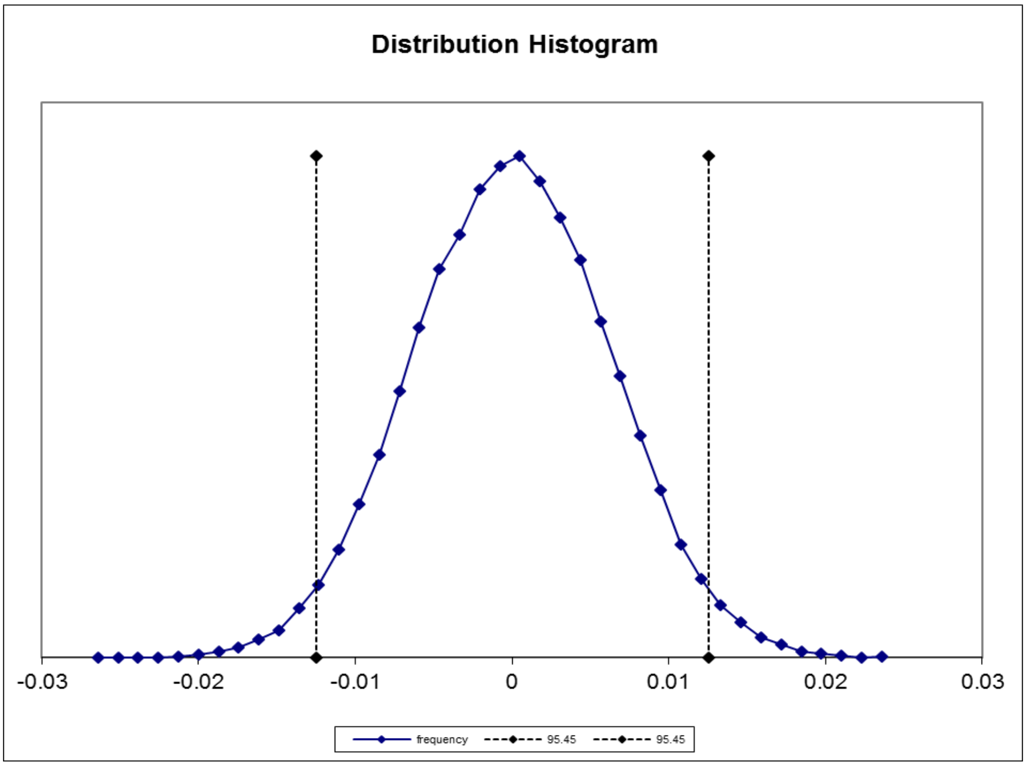
รูปที่ 1-4 แสดงผลลัพธ์ของการหาค่าความไม่แน่นอนของการวัดด้วยวิธีการจำลองระบบมอนติคาร์โล จำนวน 5,000 ครั้ง 20,000 ครั้ง 50,000 ครั้ง และ 200,000 ครั้ง ตามลำดับ *จะเห็นได้ว่าผลลัพธ์จากการจำลองมอนติคาร์โล มีค่าใกล้เคียงกับวิธีการคำนวณมาตรฐานตาม* GUM และเมื่อจำนวนครั้งของการจำลองมากขึ้นรูปแบบของการกระจายตัวจะเป็นชนิด Normal Distribution และได้ค่า upper limit และ lower limit เป็นค่าเดียวกัน



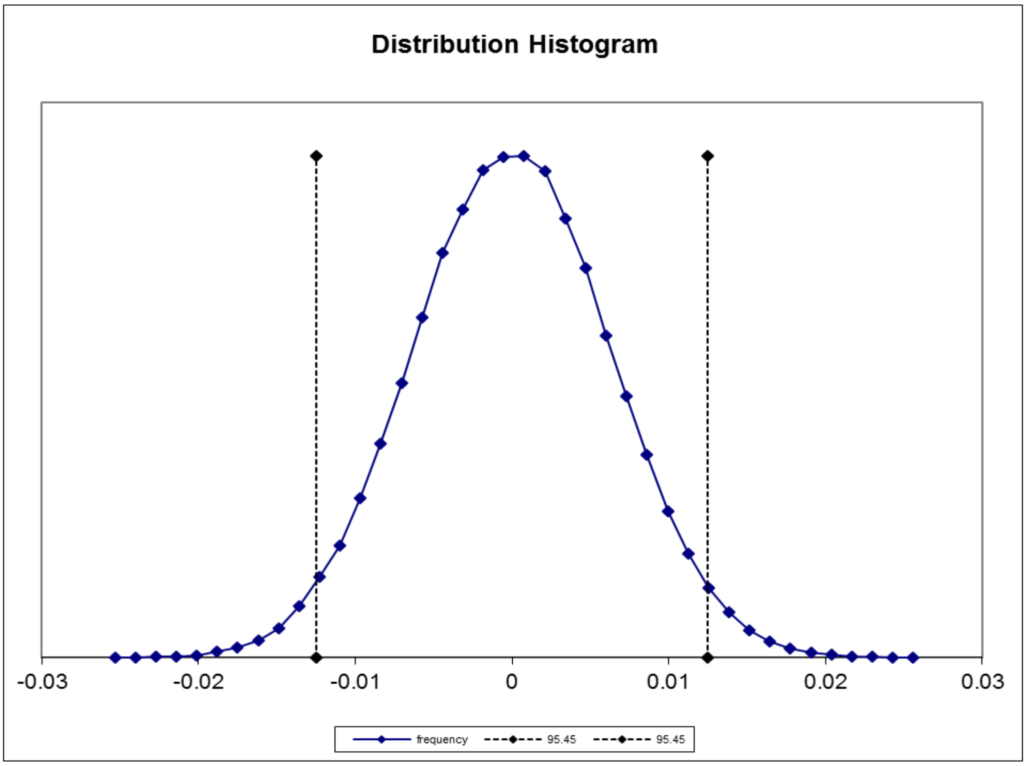
รูปที่ 1 ผลลัพธ์ตัวอย่างที่ 1 การจำลองมอนติคาร์โล 5,000 ครั้ง ที่ระดับความเชื่อมั่น 95% ค่าความไม่แน่นอนของการวัดอยู่ในช่วง -0.0124 ถึง 0.0129



รูปที่ 2 ผลลัพธ์ตัวอย่างที่ 1 การจำลองมอนติคาร์โล 20,000 ครั้ง ที่ระดับความเชื่อมั่น 95% ค่าความไม่แน่นอนของการวัดอยู่ในช่วง -0.0125 ถึง 0.0128



รูปที่ 3 ผลลัพธ์ตัวอย่างที่ 1 การจำลองมอนติคาร์โล 50,000 ครั้ง ที่ระดับความเชื่อมั่น 95% ค่าความไม่แน่นอนของการวัดอยู่ในช่วง -0.0125 ถึง 0.0125



รูปที่ 4 ผลลัพธ์ตัวอย่างที่ 1 การจำลองมอนติคาร์โล 200,000 ครั้ง ที่ระดับความเชื่อมั่น 95% ค่าความไม่แน่นอนของการวัดอยู่ในช่วง -0.0125 ถึง 0.0125

ตัวอย่างที่ 2 ในการสอบเทียบเครื่องชั่งอิเล็คทรอนิคส์ที่มีช่วงกว้างของการชั่ง(Range) 0 – 60 kg ค่าความละเอียดของเครื่องชั่ง (Resolution) 0.01 kg โดยใช้วิธีการ Direct Comparison Method ด้วยลูกตุ้มน้ำหนักมาตรฐาน OIML class M_2 ในการหาค่า Repeatability ของเครื่องชั่ง ได้แบ่งการชั่งเป็นสามช่วงได้แก่ near zero, half-full load และ full load นำข้อมูลทั้งสามช่วงมาคำนวณหาค่า Pooled Standard Deviation ในการสอบเทียบจะทำการชั่งตุ้มน้ำหนักมาตรฐานโดยเพิ่มน้ำหนักขึ้นประมาณ 10% ของ full load จนถึงตำแหน่ง full load 60 kg อ่านค่าน้ำหนักได้ 59.99 kg

การคำนวณค่าความไม่แน่นอนของการวัดด้วยวิธีการมาตรฐาน ดังนี้

1. สมาการระบบการวัด

$$S = M + E$$

โดยที่ S = ค่าน้ำหนักที่อ่านได้จากเครื่องชั่ง (Scale reading)

M = ค่าน้ำหนักมาตรฐาน

E = ค่าผิดพลาดจากการอ่านค่าน้ำหนัก (Error of the scale reading)

2. การหาค่าความไม่แน่นอนของการวัด Type A , u_a

$$u_a = \frac{S_0(M)}{\sqrt{n}}$$

โดยที่ $S_0(M)$ = Pooled standard deviation ของสามช่วงของการชั่ง

n = จำนวนครั้งของการชั่ง

ข้อมูลการชั่งในช่วง near zero คำนวณหาค่าเบี่ยงเบนมาตรฐานได้ σ_0 = 0.01 kg และมีค่า Degree of Freedom, $\nu_0 = 9$

ข้อมูลการชั่งในช่วง half full load หาค่าเบี่ยงเบนมาตรฐานได้ σ_1 = 0.01 kg และมีค่า Degree of Freedom, $\nu_1 = 9$

ข้อมูลการชั่งในช่วง full load คำนวณหาค่าเบี่ยงเบนมาตรฐานได้ σ_2 = 0.01 kg และมีค่า Degree of Freedom, $\nu_2 = 9$

จากข้อมูลการชั่งทั้งสามช่วงข้างต้นนำมาคำนวณหาค่า Pooled standard deviation ได้ดังนี้

$$S_0(M) = \sqrt{\frac{\nu_0\times\sigma_0{}^2+\nu_1\times\sigma_1{}^2+\nu_2\times\sigma_2{}^2}{\nu_0+\nu_1+\nu_2}} = 10 \text{ g}$$

ในการสอบเทียบแต่ละจุดจะทำการชั่งเพียงหนึ่งครั้ง ดังนั้นค่าความไม่แน่นอนมาตรฐาน Type A มีค่าเท่ากับ

$$u_a = \frac{S_0(M)}{\sqrt{n}} = \frac{10}{\sqrt{1}} = \pm 10 \text{ g}$$

โดยที่ Degree of Freedom มีค่าเท่ากับ 27

3. คำนวณหาค่าความไม่แน่นอนของการวัด Type B

3.1 ความไม่แน่นอนของชุดตุ้มน้ำหนักมาตรฐานจากใบรับรองการสอบเทียบ มีค่ามากที่สุดคือของตุ้มน้ำหนัก 60 kg มีค่า $\pm$1.8 g ที่ระดับความเชื่อมั่น 95% ดังนั้นค่าความไม่แน่นอนของการวัดมาตรฐาน (Standard Uncertainty), u_2 จากใบรับรองการสอบเทียบตุ้มน้ำหนักมาตรฐาน มีค่า

$$u_2 = \frac{1.8}{2} = \pm 0.9 \text{ g}$$

โดยที่ Degree of Freedom มีค่าเท่ากับค่าอนันต์

3.2 ความไม่แน่นอนของการวัดเนื่องจากการเปลี่ยนค่าไปของตุ้มน้ำหนักมาตรฐาน (Standard Weights Drift) มีค่า $\pm$0.3 g มีรูปแบบลักษณะการกระจายตัวเป็นชนิดสี่เหลี่ยมผืนผ้า (Rectangular Distribution) ดังนั้นค่าความไม่แน่นอนมาตรฐานเนื่องจาก Standard Weights Drift, u_3 จะมีค่าเท่ากับ

$$u_3 = \frac{0.3}{\sqrt{3}} = \pm 0.173 \text{ g}$$

โดยที่ Degree of Freedom มีค่าเท่ากับค่าอนันต์

3.3 ความไม่แน่นอนของการวัดเนื่องจากค่าความละเอียดของเครื่องชั่ง (Scale Resolution) $\pm$0.01 kg มีลักษณะการกระจายตัวเป็นชนิดสี่เหลี่ยมผืนผ้า ดังนั้นค่าความไม่แน่นอนของการวัดมาตรฐานเนื่องจาก Scale Resolution , u_4 จะมีค่าเท่ากับ

$$u_4 = \frac{10/2}{\sqrt{3}} = \pm 2.9 \text{ g}$$

โดยที่ degree of freedom มีค่าเท่ากับ ค่าอนันต์

3.4 ความไม่แน่นอนของการวัดเนื่องจากผลการพยุงตัวของอากาศ (Air Buoyancy Effect) มีค่า ± 0.55 g โดยที่มีรูปแบบการกระจายเป็นชนิด Rectangular Distribution ดังนั้นค่าความไม่แน่นอนมาตรฐานเนื่องจาก Air Bouyancy Effect, u_5 จะมีค่าเท่ากับ

$$u_5 = \frac{0.55}{\sqrt{3}} = \pm\ 0.318\ \text{g}$$

โดยที่ degree of freedom มีค่าเท่ากับ ค่าอนันต์

4. คำนวณหาค่าความไม่แน่นอนรวม (Combined Standard Uncertainty), u_C

$$u_C = \sqrt{{c_1}^2 {u_a}^2 + {c_2}^2 {u_2}^2 + {c_3}^2 {u_3}^2 + {c_4}^2 {u_4}^2 + {c_5}^2 {u_5}^2}$$

จากสมการระบบการวัดข้างต้น จะหาค่า sensitivity coefficients, c_1 , c_2 , c_3 , c_4, c_5 ได้โดยมีค่าเท่ากับ 1 ดังนั้น

$$u_C = \sqrt{10^2 + 0.9^2 + 0.173^2 + 2.9^2 + 0.318^2} = \pm\ 10.45\ \text{g}$$

5. คำนวณหาค่า Effective Degrees of Freedom, v_{eff}

สามารถคำนวณหาได้โดยใช้สมการ *Welch-Satterthwaite* ดังนี้

$$v_{eff} = \frac{(10.45)^4}{\frac{(10)^4}{27} + \frac{(0.9)^4}{\infty} + \frac{(0.173)^4}{\infty} + \frac{(0.318)^4}{\infty}} \approx 32$$

ผลลัพธ์ค่า Effective Degree of Freedom, $v_{eff} \approx 32$

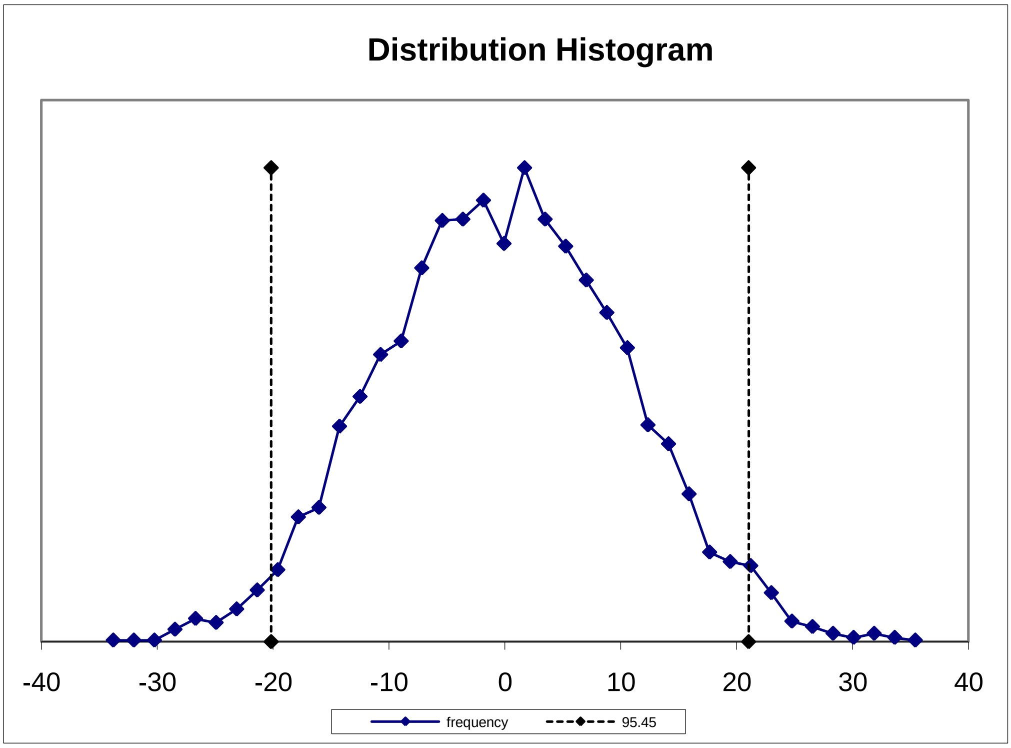
6. คำนวณหาค่าความไม่แน่นอนขยาย (Expanded Uncertainty) , U ใช้ค่า Effective Degrees of Freedom, $v_{eff} = 32$, หาค่า Coverage Factor , k จากตาราง Student's t ได้ค่า $k = 2$ ที่ระดับความเชื่อมั่น 95% ดังนั้น

$$U = k\ u_C = 2 \times 10.45 = \pm\ 20.90\ \text{g} \approx 0.02\ \text{kg}$$

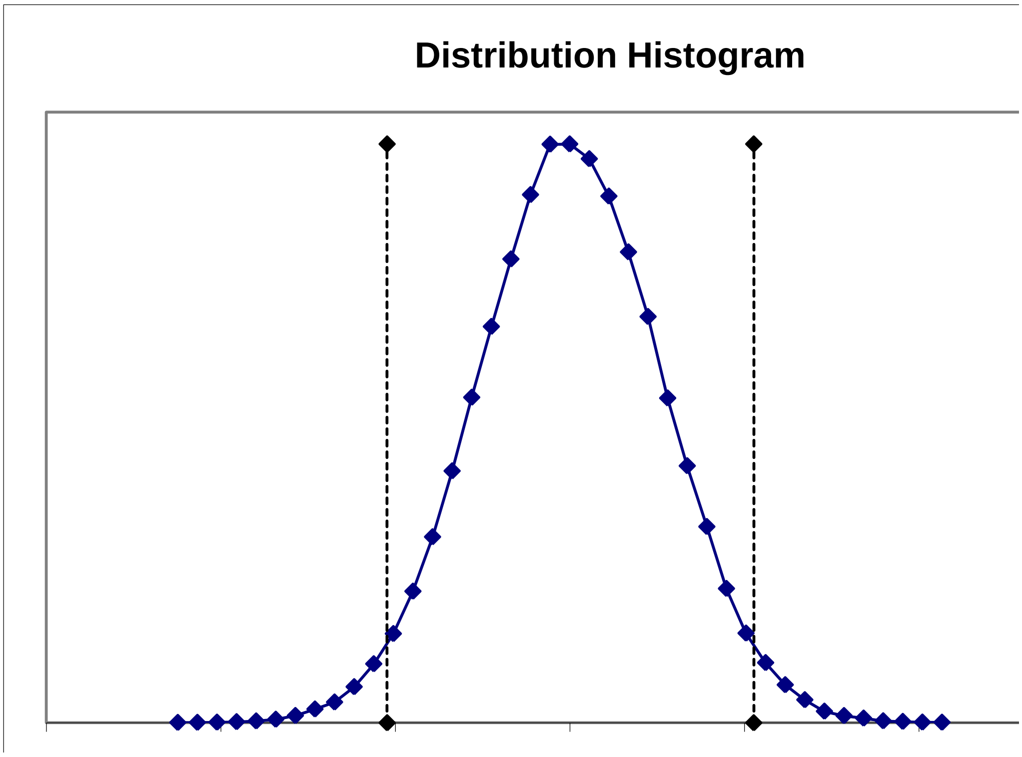
7. การรายงานผลการสอบเทียบ

ระหว่างการสอบเทียบโดยใช้ตุ้มน้ำหนักมาตรฐาน 60 kg เครื่องชั่งอ่านค่าได้ 59.99 kg มีค่าความไม่แน่นอนของการวัด $\pm$ 0.02 kg ค่า Coverage Factor, k = 2 มีรูปแบบลักษณะการกระจายตัวเป็นชนิด Normal Distribution ที่ระดับความเชื่อมั่น 95%

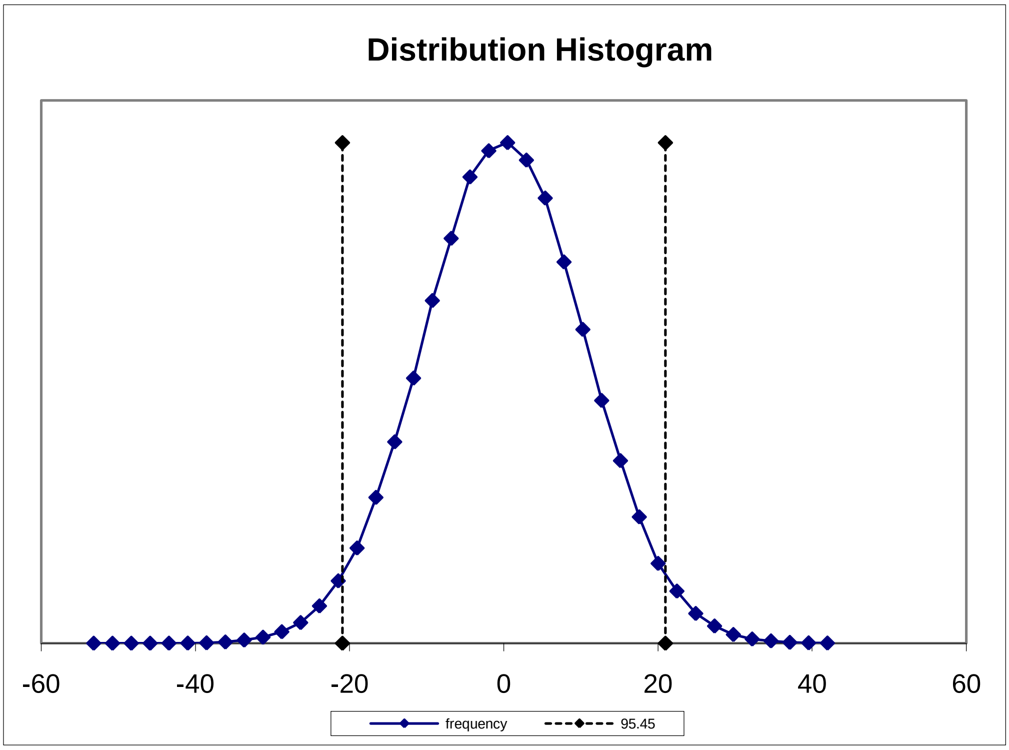
รูปที่ 8-10 แสดงผลลัพธ์ของการหาค่าความไม่แน่นอนของการวัดด้วยวิธีการจำลองระบบมอนติคาร์โล จำนวน 5,000 ครั้ง 100,000 ครั้ง และ 200,000 ครั้ง ตามลำดับ *จะเห็นได้ว่าผลลัพธ์จากการจำลองมอนติคาร์โล มีค่าใกล้เคียงกับวิธีการคำนวณมาตรฐานตาม GUM* และเมื่อจำนวนครั้งของการจำลองมากขึ้นรูปแบบของการกระจายตัวจะเป็นแบบ Normal Distribution และได้ค่า upper limit และ lower limit เป็นค่าเดียวกัน



รูปที่ 5 ผลลัพธ์ตัวอย่างที่ 2 การจำลองมอนติคาร์โล 5,000 ครั้ง ที่ระดับความเชื่อมั่น 95%
ค่าความไม่แน่นอนของการวัดอยู่ในช่วง -20.18 ถึง 21.03



รูปที่ 6 ผลลัพธ์ตัวอย่างที่ 2 การจำลองมอนติคาร์โล 100,000 ครั้ง ที่ระดับความเชื่อมั่น 95%
ค่าความไม่แน่นอนของการวัดอยู่ในช่วง -20.96 ถึง 21.07



รูปที่ 7 ผลลัพธ์ตัวอย่างที่ 2 การจำลองมอนติคาร์โล 200,000 ครั้ง ที่ระดับความเชื่อมั่น 95% ค่าความไม่แน่นอนของการวัดอยู่ในช่วง -20.93 ถึง 20.96

สรุป

บทความฉบับนี้ได้เสนอกรณีตัวอย่างของการคำนวณหาค่าความไม่แน่นอนของการวัดด้วยวิธีมาตรฐานตาม GUM และเปรียบเทียบผลกับวิธีการจำลองมอนติคาร์โล ผลลัพธ์ที่ได้มีค่าใกล้เคียงกัน ดังนั้นวิธีการจำลองมอนติคาร์โลสามารถนำไปใช้ตรวจเช็คยืนยันความถูกต้องของผลลัพธ์ที่คำนวณหาด้วยวิธีการมาตรฐาน หรือในกรณีที่สมการระบบการวัดมีความสลับซับซ้อนแต่มีข้อมูลรูปแบบลักษณะการกระจายตัวของข้อมูลขาเข้าระบบการวัด ในกรณีดังกล่าวนี้ การหาค่าความไม่แน่นอนของการวัดด้วยวิธีการจำลองมอนติคาร์โลจะเป็นทางเลือกที่สะดวกและได้ผลลัพธ์ที่สามารถเชื่อถือได้

เอกสารอ้างอิง

1. ISO Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement, 1995
2. Singapore Accreditation Council, Technical Guide 1: Guideline on the Evaluation and Expression of Measurement Uncertainty, 2nd Edition, 2001
3. Singapore Accreditation Council, Guidance Note EL001: Guideline on the Evaluation and Expression of Measurement Uncertainty for Electrical Testing Field, May 2002
4. John Hurll, เอกสารประกอบการบรรยายเรื่อง Uncertainty of Measurement from Basic to Advanced Practice จัดโดยสมาคมมาตรวิทยาแห่งประเทศไทย พ.ศ. 2557
5. บทเรียนมาตรวิทยา ฉบับปรับปรุงครั้งที่ 1 โดย สถาบันมาตรวิทยาแห่งชาติ พ.ศ. 2554

ประกาศเกียรติคุณ

ผู้เขียนขอขอบคุณ Mr. John Hurll อดีตผู้ประเมินระบบคุณภาพ *ISO 17025* จาก UKAS ประเทศสหราชอาณาจักร ที่ได้มอบโปรแกรมคำนวณหาค่าความไม่แน่นอนของการวัดด้วยวิธีการจำลองระบบมอนติคาร์โลให้แก่สมาคมมาตรวิทยาแห่งประเทศไทย ซึ่งผู้เขียนได้ใช้ในการคำนวณหาค่าความไม่แน่นอนของการวัดที่ปรากฏในบทความนี้